Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

2° medio

Unidad 0: Matemática - N°6

¡Aprendo sin parar!

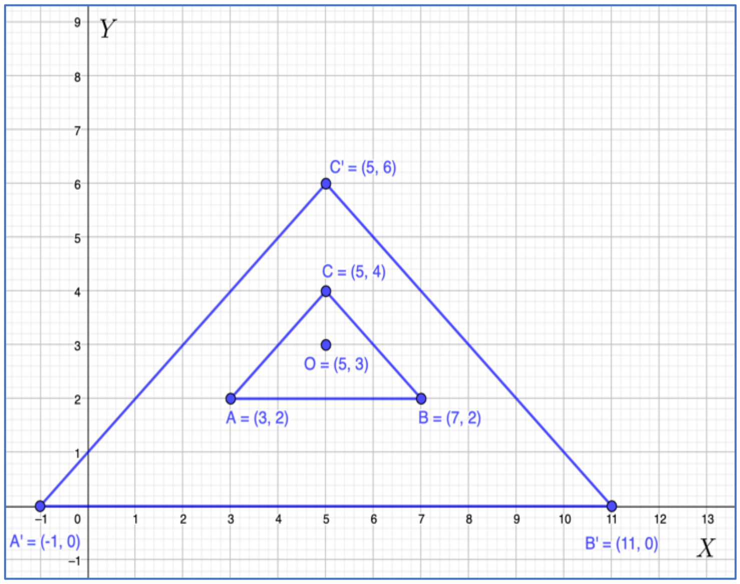
Guía de ejercicios

Estimado estudiante:
Con la siguiente guía, aprenderás a resolver situaciones, donde analizarás las propiedades de la homotecia en el plano cartesiano, usando su representación gráfica y algebraica. Al finalizar, comprenderás el concepto de homotecia así podrás identificar las propiedades y aplicarlas en distintos contextos.

Objetivo de la clase: Resolver situaciones que involucren el concepto y propiedades de la homotecia de manera algebraica y geométrica.

Actividad N°1

Dados los siguientes triángulos equiláteros homotéticos.



a. ¿Cuál crees que es el valor de la razón de homotecia? Justifica tu respuesta

b. Un estudiante plantea una estrategia para encontrar el área del triángulo A'B'C', expresando algebraicamente de la forma.

$$k = \frac{\text{área del triángulo } A'B'C'}{\text{área del triángulo } ABC}$$

Donde k es la razón de homotecia.

¿Crees que dicha representación algebraica permite encontrar el área del triángulo A'B'C'?. Justifica tu respuesta.

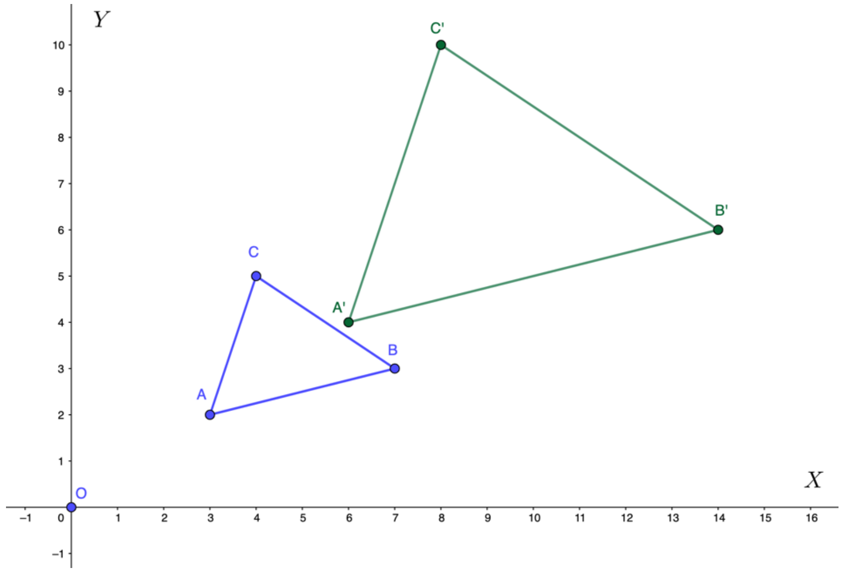
Actividad N° 2

La **homotecia** es una transformación geométrica la que a partir de una figura inicial se puede construir una semejante a ella. Para aplicar una homotecia se deben considerar los siguientes elementos:

- Dos **figuras**, una figura inicial y una semejante a ella.
- El **centro de homotecia** (O), es un punto que se encuentra al trazar todas las rectas que une los puntos correspondientes a cada vértice de la figura inicial e imagen.
- La **razón de homotecia** (k) es la razón de semejanza entre la figura imagen y la inicial.

La notación $d(O, A)$, corresponde a la distancia que existe entre el centro de homotecia y el punto inicial, o bien, puede aparecer $d(O, A')$ que es la distancia entre centro de homotecia y el punto imagen.

1. En la figura, el triángulo A'B'C' es la imagen realizada por homotecia al triángulo ABC.

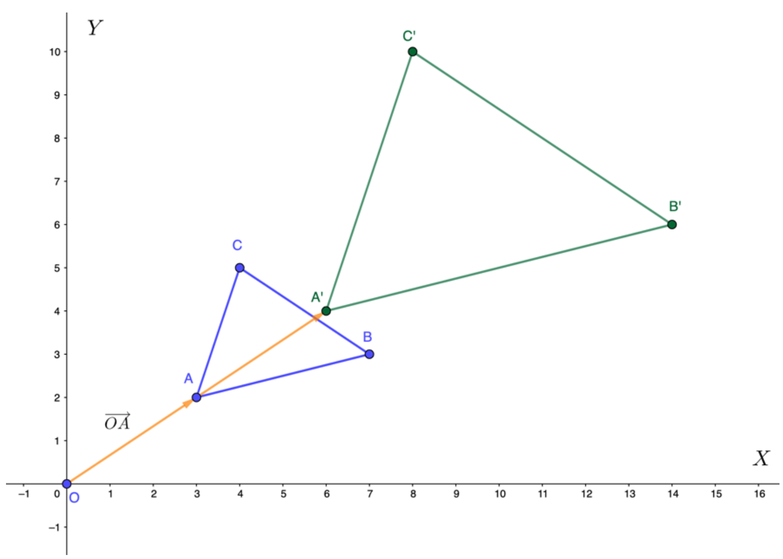


a. ¿Cuál es la razón de homotecia?

El valor de la homotecia se encuentra calculando la magnitud del vector $\overrightarrow{OA}$, que es $\sqrt{13}$. Luego, tenemos que $d(O,A) = \sqrt{13}$, $\quad d(O,A') = 2\sqrt{13}$. Estos valores se obtienen utilizando el teorema de pitágoras.

Entonces su razón de homotecia es $k = \frac{d(O,A')}{d(O,A)} = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = 2$.

Geométricamente, dicho valor significa que la magnitud del vector se repite dos veces hasta el punto A'.



La razón de homotecia no solo se puede obtener a partir de las distancias $d(O,A)$ y $d(O,A')$, sino que también de la siguiente expresión:

$$k = 2 = \frac{d(O,B')}{d(O,B)} = \frac{d(O,C')}{d(O,C)}$$

b. Analiza los ángulos interiores de los triángulos ABC y A’B’C’, ¿qué relación puedes establecer?

Los ángulos interiores de los triángulos ABC y A’B’C’ son congruente. Por ejemplo:

- $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$

Encuentra las relaciones de los ángulos que faltan.

____

____

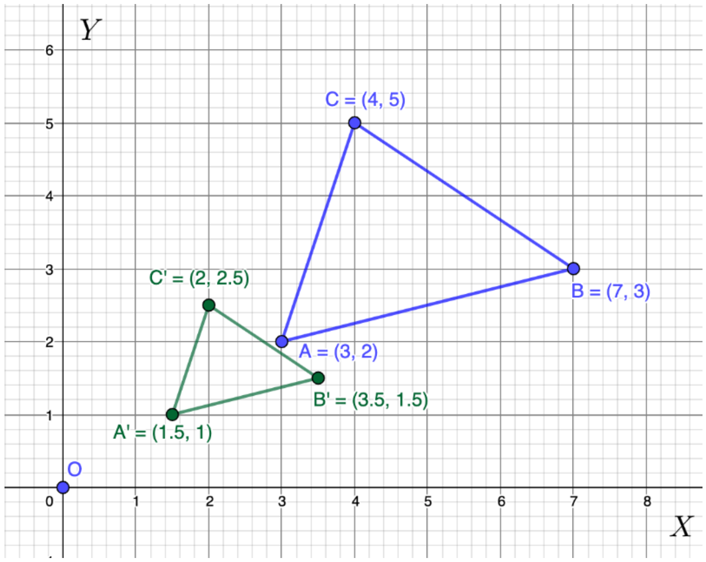
c. ¿Qué relación se puede establecer entre los lados del triángulo inicial y su imagen?

Si la figura inicial e imagen cumplen con las siguientes propiedades, son figuras homotéticas.

- Los ángulos respectivos entre las figuras homotéticas son congruentes. En el caso del ejercicio estos son:
  - $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$
  - $\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle A'C'B'$
  - $\sphericalangle CBA \cong \sphericalangle C'B'A'$
- Los lados entre las figuras homotéticas son paralelos. Según el ejercicio son:
  $\overline{AB}//\overline{A'B'}$ $\overline{BC}//\overline{B'C'}$ $\overline{CA}//\overline{C'A'}$

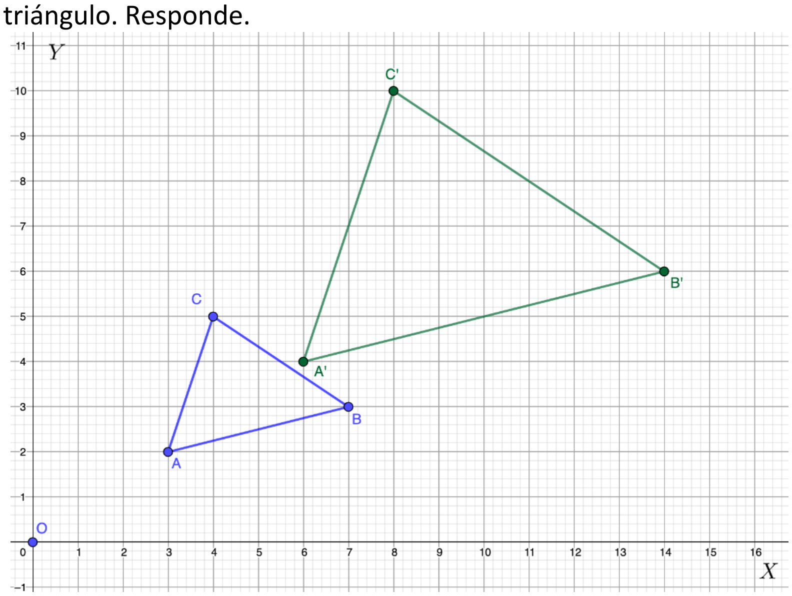
2
- La razón de homotecia que se pueden obtener, en particular de la actividad planteada es: $k = 2 = \frac{d(O,A')}{d(O,A)} = \frac{d(O,B')}{d(O,B)} = \frac{d(O,C')}{d(O,C)}$

A partir de lo anterior, podemos deducir que las figuras homotéticas también son semejantes. Si los lados respectivos no son paralelos, entonces las figuras son solamente semejantes.



¿Cuál es la razón de homotecia entre el triángulo $A'B'C'$ y el triángulo ABC?

3. Dados los siguientes triángulos homotéticos y tabla con la información de la medida de los lados de cada triángulo. Responde.



Triángulo ABC	Triángulo A'B'C'
$m(\overline{AB}) = 4{,}12$	$m(\overline{A'B'}) = 8{,}24$
$m(\overline{BC}) = 3{,}6$	$m(\overline{B'C'}) = 7{,}2$
$m(\overline{CA}) = 3{,}16$	$m(\overline{C'A'}) = 6{,}32$

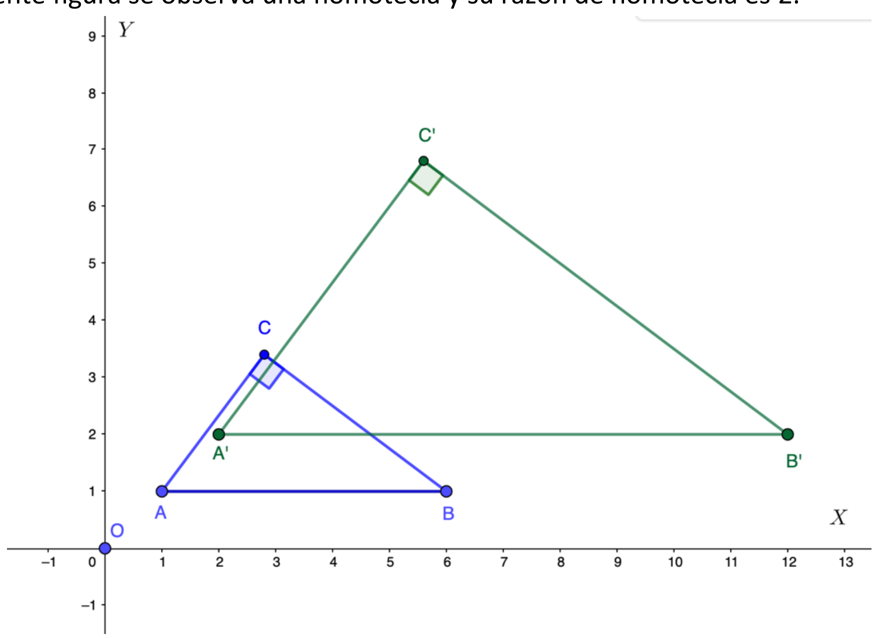
¿Cuál es la razón de homotecia entre los triángulos A'B'C' y ABC?

4. Completar las siguientes afirmaciones. (considerar las imágenes de la pregunta 2 y 3)

Cuando la razón de homotecia es $k > 0$, se denomina **homotecia directa** y se obtienen tres casos:

- Si $k > 1$, entonces la figura imagen es _______________ de la figura inicial.
- Si $k = 1$, entonces la figura imagen es ________________ a la figura inicial.
- Si $0 < k < 1$, entonces la figura imagen es _____________ de la figura inicial.

5. En la siguiente figura se observa una homotecia y su razón de homotecia es 2.



a. Si el perímetro del ΔABC es 12 cm, ¿Cuál es el perímetro del $\Delta A'B'C'$?

Como las figuras homotéticas son triángulos semejantes cumplen que sus perímetros también son proporcionales, es decir,

$$k = \frac{Perímetro\ Imagen}{Perímetro\ inicial}$$

Formaremos una proporción que se relaciona con el problema planteado.

$$2 = \frac{Perímetro\ Imagen}{Perímetro\ inicial}$$

$$2 = \frac{Perímetro\ Imagen}{12\ cm}$$

$$2 = \frac{x}{12}$$

Ahora, resuelve la proporción

El perímetro del $\Delta A'B'C'$ es ________

b. Si el área del ΔABC es 6 cm^2, ¿ Cuál es el área del $\Delta A'B'C'$?

Las figuras homotéticas son triángulos semejantes, cumplen con una propiedad que hace referencia al área que es la siguiente.

$$k^2 = \frac{área\ \ de\ la\ imagen}{área\ \ inicial}$$

$$(2)^2 = \frac{área\ de\ la\ imagen}{6\ cm^2}$$

$$4 = \frac{área\ de\ la\ imagen}{6\ cm^2}$$

Resuelve la proporción

$$4 = \frac{x}{6}$$

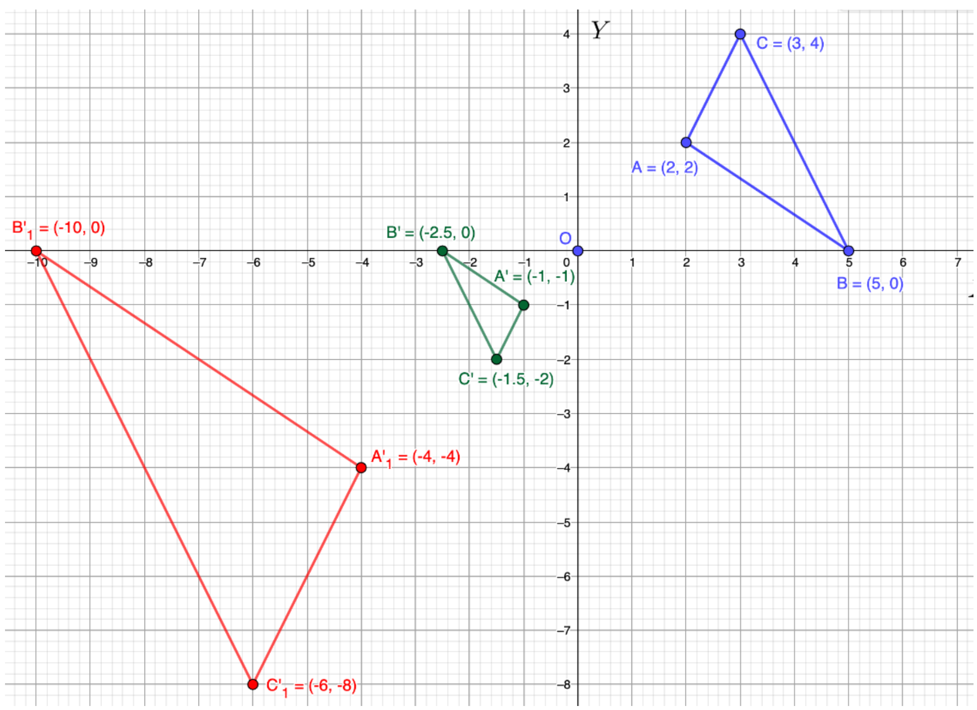
El área del $\Delta A'B'C'$ es _______

Chequeo de la comprensión

Si a un cuadrilátero de perímetro 57 cm se aplica una razón de homotecia $k = \frac{1}{3}$, ¿Cuál es el perímetro del cuadrilátero resultante?

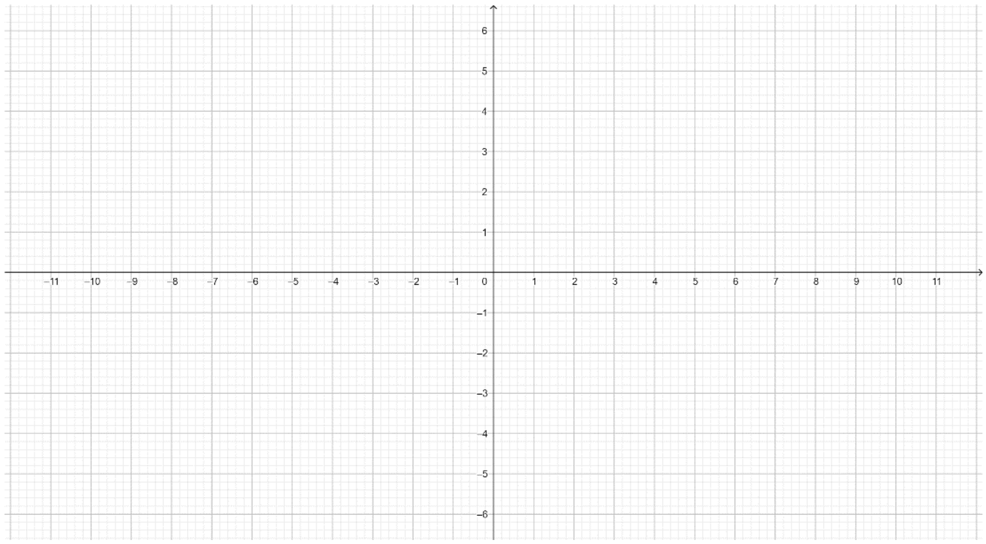
Actividad N° 3: Práctica independiente

1. Dados los siguientes triángulos homotéticos, completa las siguientes afirmaciones.



a. Cuando la razón de homotecia es $k < 0$, se denomina ___________________ y se obtienen tres casos.
   - Si ___________, entonces la figura imagen es una amplificación de la figura original, pero se encuentra invertida.
   - Si ___________, entonces la figura imagen es congruente a la figura original y se encuentra invertida.
   - Si ___________, entonces la figura imagen es una reducción de la figura original, además se encuentra invertida.

2. Si al ΔABC se aplica una homotecia con centro en O y razón de homotecia $k = -2$, construye el $\Delta A'B'C'$en el plano cartesiano.

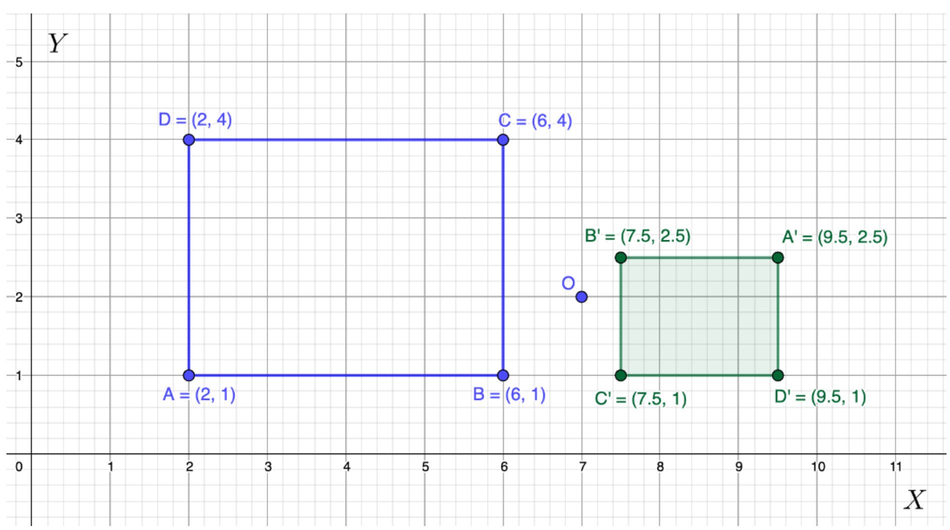


3. A un cuadrilátero ABCD se aplico una razón de homotecia $k = 3$. Si se sabe que el perímetro del cuadrilátero ABCD es 15 cm, ¿cuál es el perímetro del cuadrilátero A'B'C'D' resultante?.

4. Si se tiene un ΔABC equilátero de área $\frac{25\sqrt{3}}{4}\ cm^2$ y se aplica una homotecia de razón $k = 4$, ¿cuál es el área del $\Delta A'B'C'$ resultante?

Actividad de síntesis (ticket de salida)

En la figura, el cuadrilátero ABCD se aplica una razón de homotecia obteniendo el cuadrilátero A'B'C'D' (utiliza como unidad de medida centímetro).



Completar con una V si es verdadero o una F si es falsa en cada una de las siguientes afirmaciones. Justifica las falsas.

a. ______ La razón de homotecia entre el cuadrilátero ABCD y el cuadrilátero A’B’C’D’ es $k = -1$

b. ______ Como los cuadriláteros ABCD y A’B’C’D’ son figuras homotéticas, el $\overline{A'B'}$ es paralelo a $\overline{AD}$.

c. ______ El área del cuadrilátero A’B’C’D’ es $4\ cm^2$

d. ______ Si se sabe el perímetro del cuadrilátero ABCD es 14 cm y se quiere saber el perímetro del cuadrilátero A’B’C’D’, entonces se puede obtener por medio de la siguiente expresión:

$$(0{,}5)^2 = \frac{perímetro\ imagen}{14\ cm}$$

Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

¡Aprendo sin parar!

2° medio

Guía de ejercicios

Unidad 0: Matemática – N°6