Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

2° medio

Unidad 0: Matemática - N°5

¡Aprendo sin parar!

Guía de ejercicios

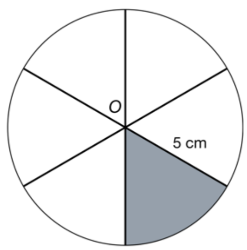
Estimado estudiante:
Con la siguiente guía, aprenderás a resolver problemas que se relacionan con aplicar las expresiones algebraicas de perímetro y área de sectores y segmentos circulares, a partir de ángulos centrales específicos. Al finalizar, sabrás reconocer el ángulo central y podrás desarrollar la expresión que permita obtener los valores del área y del perímetro.

Objetivo de la clase: Deducir la expresión que permite obtener los valores del área y del perímetro de sectores y segmentos circulares respectivamente, a partir de ángulos centrales de 60°, 90°, 120° y 180° por medio de representaciones concretas.

Soluciones

Actividad N°1

1. Dada la siguiente circunferencia de centro O .

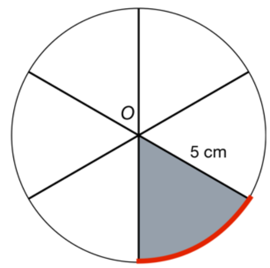
	a) ¿Qué parte del círculo es el sector circular? Respuesta correcta: $\frac{1}{6}$ b) ¿Cuál es la medida del ángulo del centro? Respuesta correcta: $60º$

a. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa la parte del sector circular relacionada con la medida del ángulo?. Marca con una X la respuesta correcta.

☐ $\frac{360º}{60º}$	☐ $\frac{60º}{360º}$	☐ $\frac{180º}{60º}$

Respuesta correcta: $\frac{60º}{360º}$

b. Observa el arco de la circunferencia marcado.

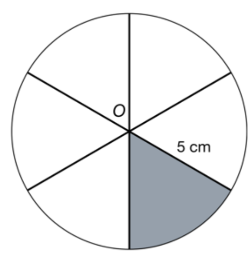


¿Cuál de las siguientes expresiones permite calcular la longitud del arco de la circunferencia? Marca con X la respuesta correcta.

☐ $\frac{360º}{60º} \cdot 2 \cdot \pi \cdot (5cm)$	☐ $\frac{360º}{60º} \cdot 2 \cdot \pi \cdot (5cm)^2$	☐ $\frac{60º}{360º} \cdot 2 \cdot \pi \cdot (5cm)$	☐ $\frac{60º}{360º} \cdot 2 \cdot \pi \cdot (5cm)^2$

Respuesta correcta: Es la expresión $\frac{60º}{360º} \cdot 2 \cdot \pi \cdot (5\ cm)$

c. En la siguiente circunferencia de centro O se encuentra marcado un sector circular.



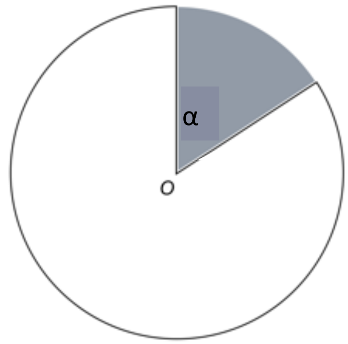
¿Cuál de las siguientes representaciones permite calcular el perímetro del sector circular? Marca con una X la respuestac correcta.

☐ $2 \cdot (5\ cm) + \frac{360º}{60º} \cdot 2 \cdot \pi \cdot (5cm)$	☐ $2 \cdot (5\ cm) + \frac{60º}{360º} \cdot 2 \cdot \pi \cdot (5\ cm)$

Respuesta correcta:

$$2 \cdot (5\ cm) + \frac{60º}{360º} \cdot 2 \cdot \pi \cdot (5\ cm)$$

d. En el círculo de centro O.



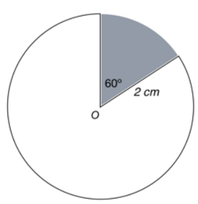
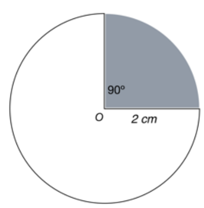
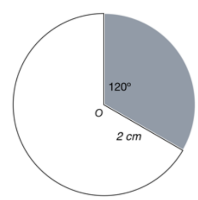
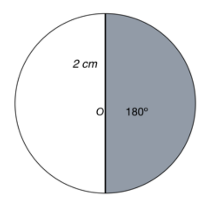
¿Cuál es la expresión algebraica que permite encontrar el perímetro del sector circular y el área, considerando que un ángulo cualquiera con medida α?

Respuesta correcta: $P_{sector\ circular} = 2r + \frac{\alpha}{360º} \cdot 2\pi r$

$A_{sector\ circular} = \frac{\alpha}{360º} \cdot \pi r^2$

Actividad N° 2

1. Dadas las siguientes circunferencias de centro O .

Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4
			

a. ¿Cuál es la parte del sector circular que corresponde a cada circunferencia?

Para la figura 1 es	Para la figura 2 es	Para la figura 3 es	Para la figura 4 es
$\frac{60º}{360º} = \frac{1}{6}$	$\frac{90º}{360º} = \frac{1}{4}$	Respuesta correcta: $\frac{120º}{360º} = \frac{1}{3}$	Respuesta correcta: $\frac{180º}{360º} = \frac{1}{2}$

b. ¿Cuál es el perímetro del sector circular de las figuras 1 y 2?

Para encontrar el perímetro del sector circular de las figuras 1 y 2, debemos utilizar la siguiente expresión algebraica $P_{sector\ circular} = 2 \cdot r + \frac{\alpha}{360º} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$

$$P_{sector\ circular} = 2 \cdot (2\ cm) + \frac{60º}{360º} \cdot 2 \cdot \pi \cdot (2\ cm)$$

$$P_{sector\ circular} = 4\ cm + \frac{1}{6} \cdot 4\pi\ cm$$

$$P_{sector\ circular} = \left(4\ + \frac{2}{3}\pi\right)\ cm$$

El perímetro del sector circular de la figura 2, corresponde a

$$P_{sector\ circular} = 2 \cdot (2\ cm) + \frac{90º}{360º} \cdot 2 \cdot \pi \cdot (2\ cm)$$

$$P_{sector\ circular} = 4\ cm + \frac{1}{4} \cdot 4\pi\ cm$$

$$P_{sector\ circular} = (4 + \pi)\ cm$$

c. Completa el procedimiento para encontrar el área del sector circular para las figuras 3 y 4.

Para encontrar el área del sector circular de las figuras, tenemos que utilizar la expresión algebraica $A_{sector\ circular} = \frac{\alpha}{360º} \cdot \pi r^2$.

Para la figura 3, el procedimiento es el siguiente:

$$A_{sector\ circular} = \frac{120º}{360º} \cdot \pi (2\ cm)^2$$

$$A_{sector\ circular} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4\ cm^2$$

____

Respuesta correcta: $A_{sector\ circular} = \frac{4}{3}\pi\ cm^2$

Para la figura 4, el procedimiento es el siguiente:

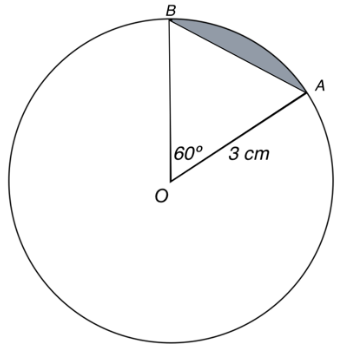
$$A_{sector\ circular} = \frac{180º}{360º} \cdot \pi (2\ cm)^2$$

$$A_{sector\ circular} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4\ cm^2$$

____

Respuesta correcta: $A_{sector\ circular} = \frac{4}{2}\pi\ cm^2 = 2\pi\ cm^2$

2. Dada la siguiente circunferencia de centro O. Calcular el perímetro del segmento circular.



Para calcular el perímetro del segmento circular debes sumar la longitud del $\widehat{AB}$ más la medida de $\overline{AB}$, es decir, $P_{segmento\ circular} = m\left(\widehat{AB}\right) + m(\overline{AB})$.

Considerando la expresión y la información entregada, podremos encontrar el perímetro del segmento circular:

Es importante observar que el triángulo AOB es un triángulo equilátero, por lo tanto, $m(\overline{AB}) = 3\ cm$.

$$P_{segmento\ circular} = \tfrac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot (3\ cm) + 3\ cm.$$

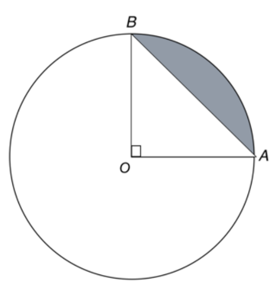
$$P_{segmento\ circular} = \frac{1}{6} \cdot 6\pi\ cm + 3\ cm$$

$$P_{segmento\ circular} = (\pi + 3)\ cm$$

Si consideramos $\pi \approx 3{,}14$, obtenemos que:

$$P_{segmento\ circular} \approx 6{,}14\ cm$$

3. Dada la siguiente circunferencia de centro O y radio 12 cm. Calcular el área del segmento circular. Considera $\pi \approx 3{,}14$.



Para calcular el área del segmento circular, en primer lugar deberás encontrar el área del sector circular.

$$A_{sector\ circular} = \frac{\alpha}{360º} \cdot \pi \cdot r^2$$

Respuesta correcta:

$$A_{sector\ circular} = \frac{90º}{360º} \cdot \pi \cdot (12\ cm)^2 = \frac{1}{4} \cdot 144\pi\ cm^2 = 36\pi\ cm^2 \approx 113,04\ cm^2$$

Luego, debes analizar el triángulo que conforma el sector circular, en este caso es un triángulo rectángulo isósceles, ya que $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ y el ángulo de centro mide 90º.

A continuación, se calcula el área del triángulo rectángulo isósceles que es:

Respuesta correcta: $A_{triángulo\ rectángulo} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot 12}{2}\ cm^2 = 72\ cm^2$

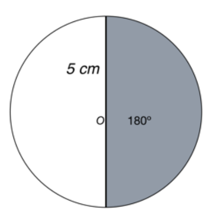
Finalmente, el área del segmento circular es:

$$A_{segmento\ circular} = A_{Sector\ circular} - A_{Triángulo\ rectángulo} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Respuesta correcta: $A_{segmento\ circular} = 113,04\ cm^2 - 72\ cm^2 \approx 41,04 cm^2$

Chequeo de la comprensión

Calcular el perímetro y el área del sector circular. Considerar $\pi \approx 3,14$.



Respuesta correcta:

$$P_{sector\ circular} = 2 \cdot (5\ cm) + \frac{180º}{360º} \cdot 2 \cdot \pi \cdot (5\ cm) = 10\ cm + \frac{1}{2} \cdot 10\pi\ cm = (10 + 5\pi) cm \approx 25,7\ cm$$

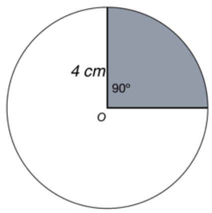
$$A_{sector\ circular} = \frac{180º}{360º} \cdot \pi (5\ cm)^2 = \frac{1}{2} \cdot 25\pi\ cm^2 = \frac{25}{2} \pi\ cm^2 \approx 39,25\ cm^2$$

Actividad N° 3: Práctica independiente

1. Calcular el perímetro y el área de cada sector circular. Considera $\pi \approx 3{,}14$.

<table>
<tr>
<td>

a.



</td>
<td>

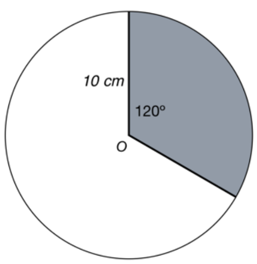
Respuesta correcta:

$$\begin{aligned} P_{sector\ circular} &= 2 \cdot (4\ cm) + \frac{90º}{360º} \cdot 2 \cdot \pi \cdot (4\ cm) \\ &= 8\ cm + \frac{1}{4} \cdot 8\pi\ cm \\ &= (8 + 2\pi)\ cm \\ &\approx 14{,}28\ cm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{sector\ circular} &= \frac{90º}{360º} \cdot \pi (4\ cm)^2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot 16\pi cm^2 \\ &= 4\pi cm^2 \\ &\approx 12{,}56\ cm^2 \end{aligned}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

b.



</td>
<td>

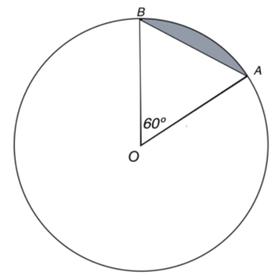
Respuesta correcta:

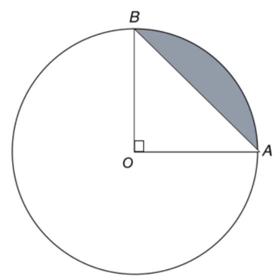
$$\begin{aligned} P_{sector\ circular} &= 2 \cdot (10\ cm) + \frac{120º}{360º} \cdot 2 \cdot \pi \cdot (10\ cm) \\ &= 20\ cm + \frac{1}{3} \cdot 20\pi\ cm \\ &= \left(20 + \frac{20}{3}\pi\right)\ cm \\ &\approx 40{,}9\overline{3}\ cm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{sector\ circular} &= \frac{120º}{360º} \cdot \pi (10\ cm)^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 100\pi cm^2 \\ &= \frac{100}{3}\pi cm^2 \\ &\approx 104{,}\overline{6}\ cm^2 \end{aligned}$$

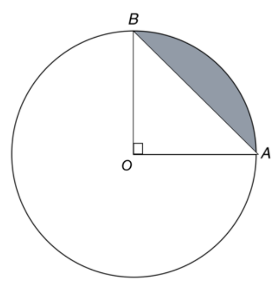
</td>
</tr>
</table>

2. Calcular el perímetro de cada segmento circular. Considera $\pi \approx 3{,}14$.

a.  El radio mide 7 cm	Respuesta correcta: $P_{segmento\ circular} = \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot (7\ cm) + 7\ cm$ $P_{segmento\ circular} = \left(\frac{14}{6}\pi + 7\right)\ cm$ $P_{segmento\ circular} \approx 14{,}32\overline{6}\ cm$

b.  El radio mide 15 cm	Respuesta correcta: $P_{segmento\ circular} = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot (15\ cm) + 21{,}21\ cm$ $P_{segmento\ circular} = \left(\frac{30}{4}\pi + 21{,}21\right)\ cm$ $P_{segmento\ circular} \approx 44{,}76\ cm$

3. Completar el procedimiento para calcular el área del segmento circular de la siguiente circunferencia de centro O y radio 20 cm.

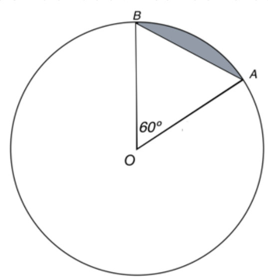


Primer paso	$A_{sector\ circular} =$ Respuestas correcta: $A_{sector\ circular} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (20\ cm)^2 \approx 314\ cm^2$

Segundo paso	$A_{triángulo\ rectángulo} =$ Respuesta correcta: $A_{triángulo\ rectángulo} = \frac{20 \cdot 20}{2} = 200\ cm^2$
Tercer paso	$A_{segmento\ circular} =$ Respuesta correcta: $A_{segmento\ circular} \approx 314\ cm^2 - 200\ cm^2 \approx 114\ cm^2$

Actividad de síntesis (ticket de salida)

Dada la siguiente circunferencia de centro O y radio 12 cm. Verifica si cada afirmación es verdadera, colocando (V) o falsa (F) según corresponda. Justifica las falsas.



a. ______ El triángulo ABO corresponde a un triángulo isósceles.
Respuesta correcta: F, el triángulo ABC corresponde a un triángulo equilátero.

b. ______ La $m(\overline{AB}) = 12\ cm$
Respuesta correcta: V

c. ______ El perímetro del segmento circular es $\frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot (12\ cm) + 12\ cm$
Respuesta correcta: V

d. ______ El área del triángulo ABO es aproximadamente $62{,}4\ cm^2$.
Respuesta correcta: V

e. ______ El área del segmento circular es aproximadamente $12{,}96\ cm^2$
Respuesta correcta: V

Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

¡Aprendo sin parar!

2° medio

Guía de ejercicios

Unidad 0: Matemática - N°5

Soluciones